20. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{(1-z)^2}$.

Para $x=0$, $\operatorname{arc\,tag} z = 0$ y $z=0$; Para $x=\pi/3$, $\operatorname{arc\,tag} z = \pi/6$ y $z=\sqrt{3}/3$. Por tanto

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = 2\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z}\Big]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3}+1$$

Problemas propuestos

21. Hallar la integral $\displaystyle\int_a^b c\,dx$ del Problema 1 dividiendo el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos de longitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$. Obsérvese que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = b - a$.

22. Hallar la integral $\displaystyle\int_0^5 x\,dx$ del Problema 2 empleando subintervalos de igual longitud y (*a*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de los subintervalos, (*b*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, (*c*) eligiendo los puntos x_k a un tercio de sus longitudes, es decir, tomando $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x$, $x_2 = \frac{4}{3}\Delta x, \ldots$

23. Comprobar que $\displaystyle\int_1^4 x^2\,dx = 21$ empleando subintervalos de igual longitud y eligiendo los puntos x_k (*a*) en el extremo derecho de los subintervalos (*b*) en el extremo izquierdo de los subintervalos, (*c*) en el punto medio de los subintervalos.

24. Con los mismos subintervalos y puntos elegidos en el Problema 23(*a*), calcular las integrales $\displaystyle\int_1^4 x\,dx$ y $\displaystyle\int_1^4 (x^2+x)\,dx$ y demostrar que $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

25. Hallar las integrales $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx$ y $\displaystyle\int_2^4 x^2\,dx$. Comparar la suma con el resultado del Problema 23 y demostrar que

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{cuando } a < c < b.$$

26. Calcular $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Ind. $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x}\Delta x = e^{\Delta x}(e-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ y $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ es una forma indeterminada del tipo 0/0.

27. Demostrar las propiedades 4 y 5 de la integral definida.

28. Aplicar el teorema fundamental o regla de Barrow para calcular:

(*a*) $\displaystyle\int_0^2 (2+x)\,dx = 6$

(*b*) $\displaystyle\int_0^2 (2-x)^2\,dx = 8/3$

(*c*) $\displaystyle\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx = 9$

(*d*) $\displaystyle\int_{-1}^2 (1-t^2)t\,dt = -9/4$

(*e*) $\displaystyle\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = -116/15$

(*f*) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx = 26$

(*g*) $\displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx = 40/3$

(*h*) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2$

(*i*) $\displaystyle\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx = 1/30$

(*j*) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = 6$

(*k*) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}a^2\pi$

(*l*) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$